Leçon 8.0
Oscillateur Généralisé
– Intro//Rappel –

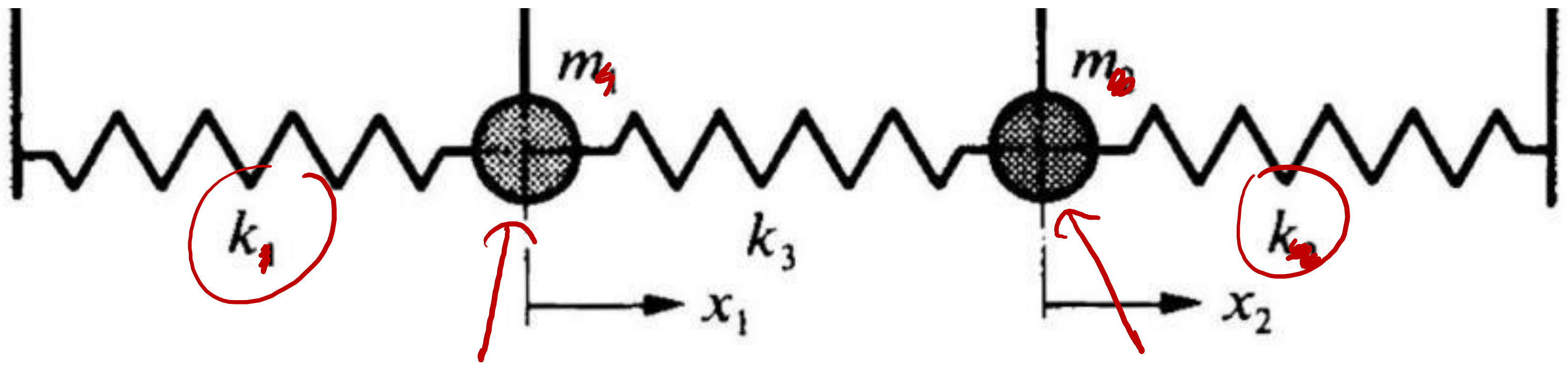
ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

EPFL
École polytechnique fédérale de Lausanne

EPFL Systèmes symétriques (leçon 6)

→ Trouvé solutions où les 2 DdL bougent avec la même fréquence



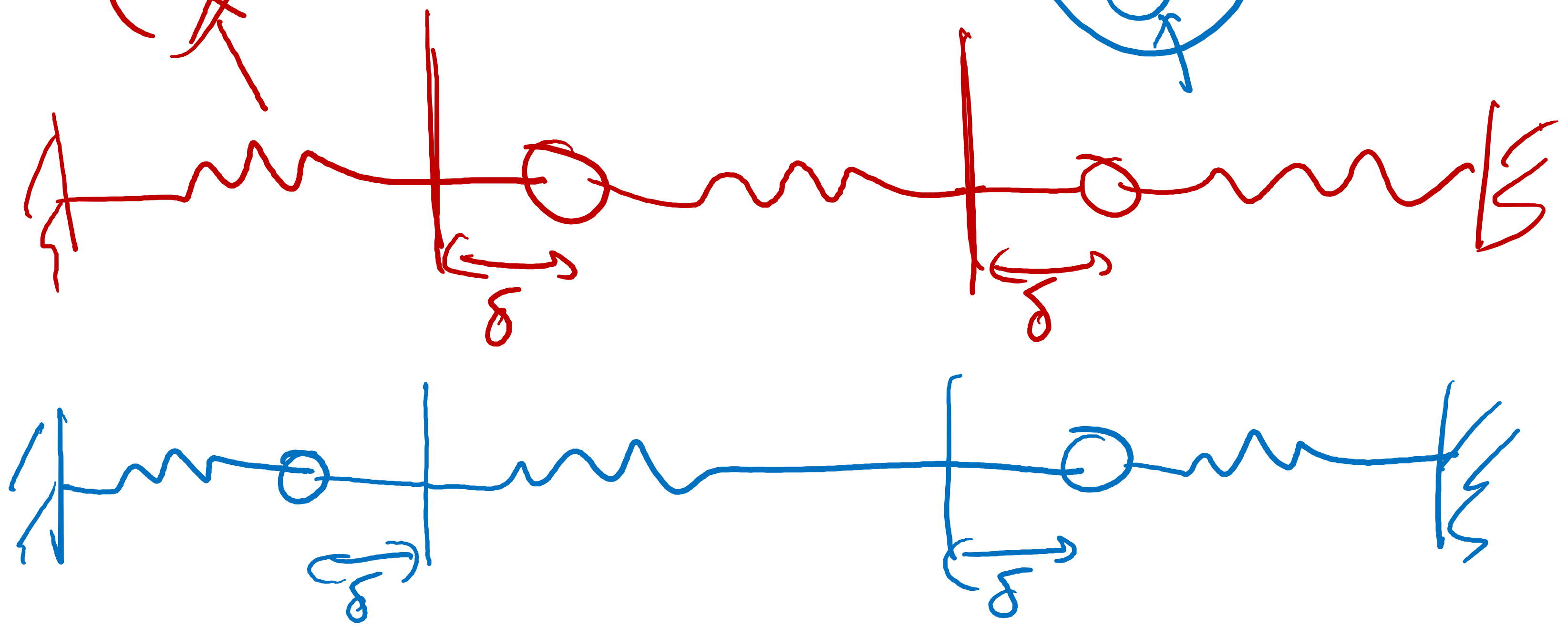
n DdL ⟷ n fréq. et n modes propres

Solutions générales du régime libre du système symétrique

$$x_1 = X_I \cos(\omega_I t - \varphi_I) + X_{II} \cos(\omega_{II} t - \varphi_{II})$$

$$x_2 = X_I \cos(\omega_I t - \varphi_I) - X_{II} \cos(\omega_{II} t - \varphi_{II})$$

$$\vec{x}(t) = X_I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_I t - \varphi_I) + X_{II} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_{II} t - \varphi_{II})$$



Premier mode du système (oscillations en phase)

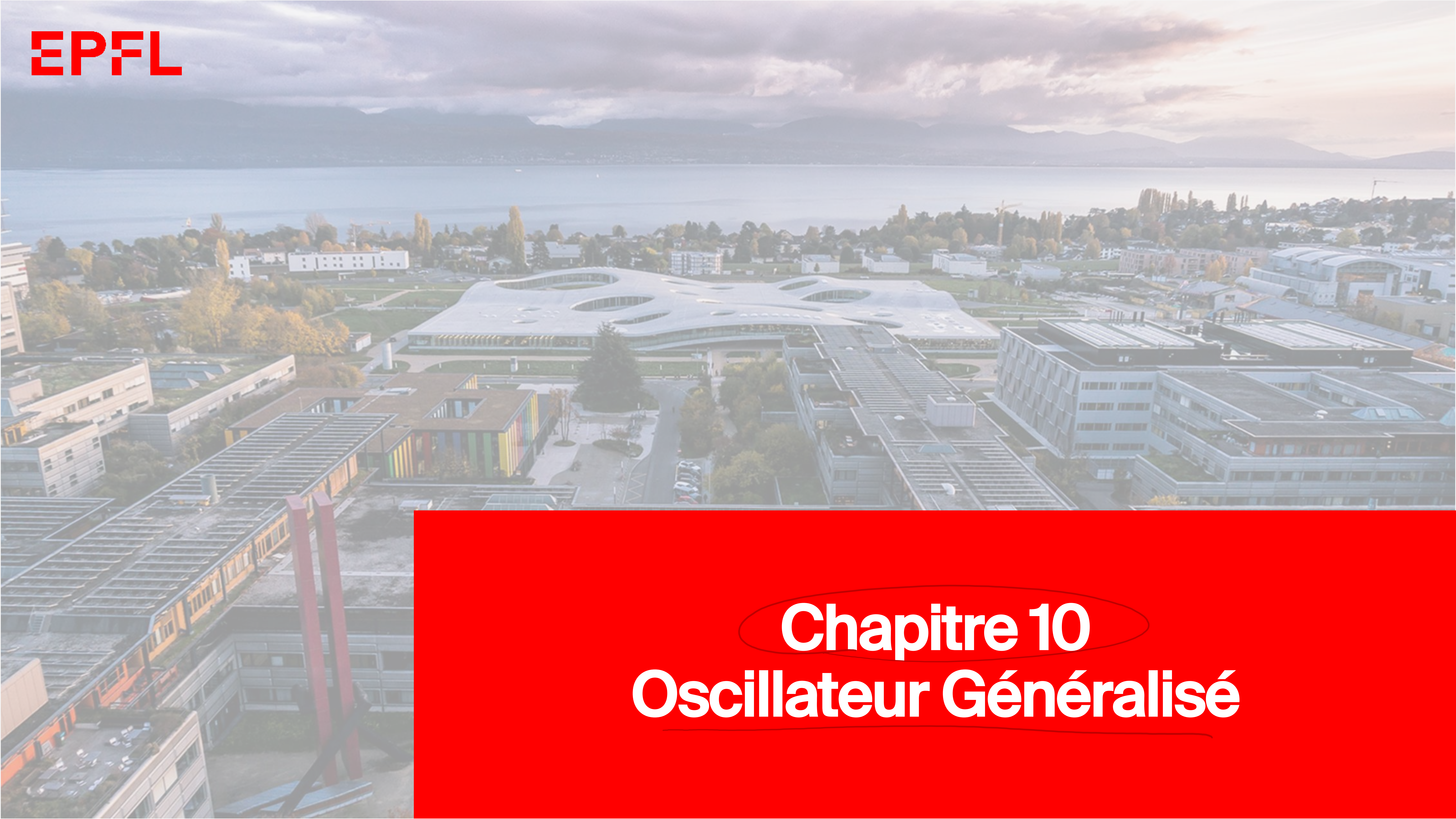
$$x_1 = x_2 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \tag{8.22}$$

Deuxième mode du système (oscillations en opposition de phase)

$$\begin{cases} x_1 = X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = -X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \tag{8.23}$$

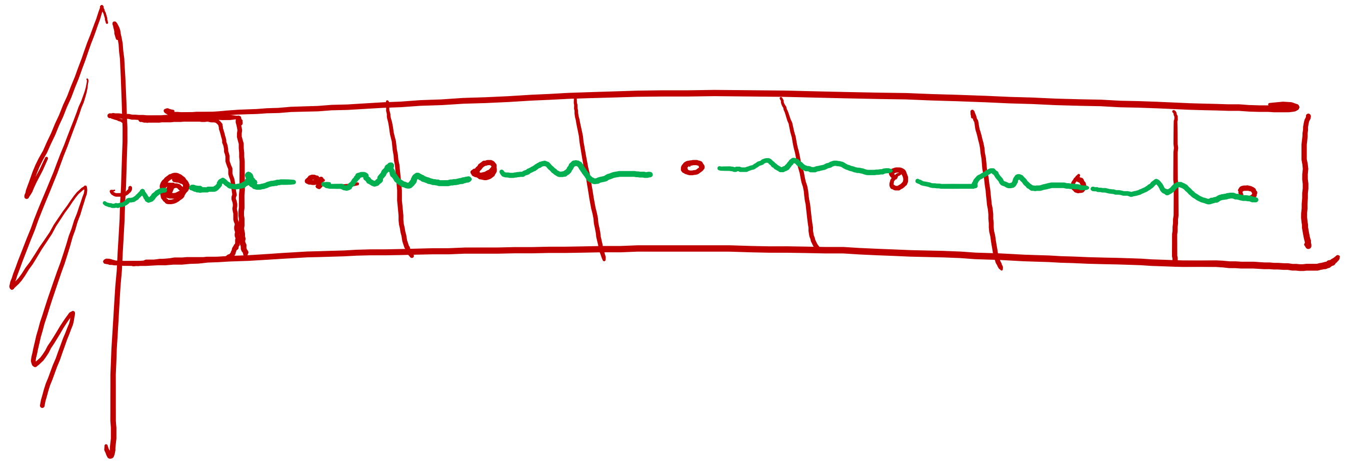
Modes propres et Réponse dynamique

https://www.youtube.com/watch?v=oe0Pjv2zopQ



Chapitre 10
Oscillateur Généralisé

Concept d'oscillateur généralisé – E.d.M



Equation différentielle matricielle d'un *système oscillant linéaire général discret* ou *oscillateur généralisé* à n degrés de liberté

n EdM.

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) \qquad (10.1)$$

$\boldsymbol{x}$ =

$\boldsymbol{x}$	vecteur des déplacements
$\dot{\boldsymbol{x}}$	vecteur des vitesses
$\ddot{\boldsymbol{x}}$	vecteur des accélérations
$[M]$	matrice des masses
$[C]$	matrice d'amortissement (pertes)
$[K]$	matrice de rigidité
$\boldsymbol{f}$	vecteur des forces extérieures

Exemples d'oscillateurs généralisés à n degrés de liberté

- systèmes de solides indéformables, soumis à des forces élastiques et des forces résistives linéaires
- systèmes continus déformables, discré-tisés par des méthodes numériques ou expérimentales

Concept d'oscillateur généralisé - Energies

Energie cinétique de l'oscillateur généralisé (forme quadratique symétrique positive)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} m_{ij}\, \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T [M] \dot{\boldsymbol{x}} \quad (10.2)$$

Energie potentielle de l'oscillateur généralisé (forme quadratique symétrique positive non strictement)

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} k_{ij}\, x_i x_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T [K] \boldsymbol{x} \quad (10.3)$$

Fonction de dissipation de Rayleigh (demi-puissance consommée) de l'oscillateur (forme quadratique symétrique positive non strictement)

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} c_{ij}\, \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T [C] \dot{\boldsymbol{x}}} \quad (10.4)$$

Equations de Lagrange

Equations de Lagrange d'un système dissipatif à
n degrés de liberté

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_k} = f_k(t)$$

$$k = 1, \ldots, n \qquad (10.9)$$

ou sous forme vectorielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right\} - \left\{\frac{\partial T}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i}\right\} = \boldsymbol{f}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{f}(t) \qquad (10.10)$$

Equations de Lagrange

Equations de Lagrange de l'oscillateur généralisé
(énergie cinétique indépendante des déplacements)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right\} + \left\{\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i}\right\} = \boldsymbol{f}(t)$$

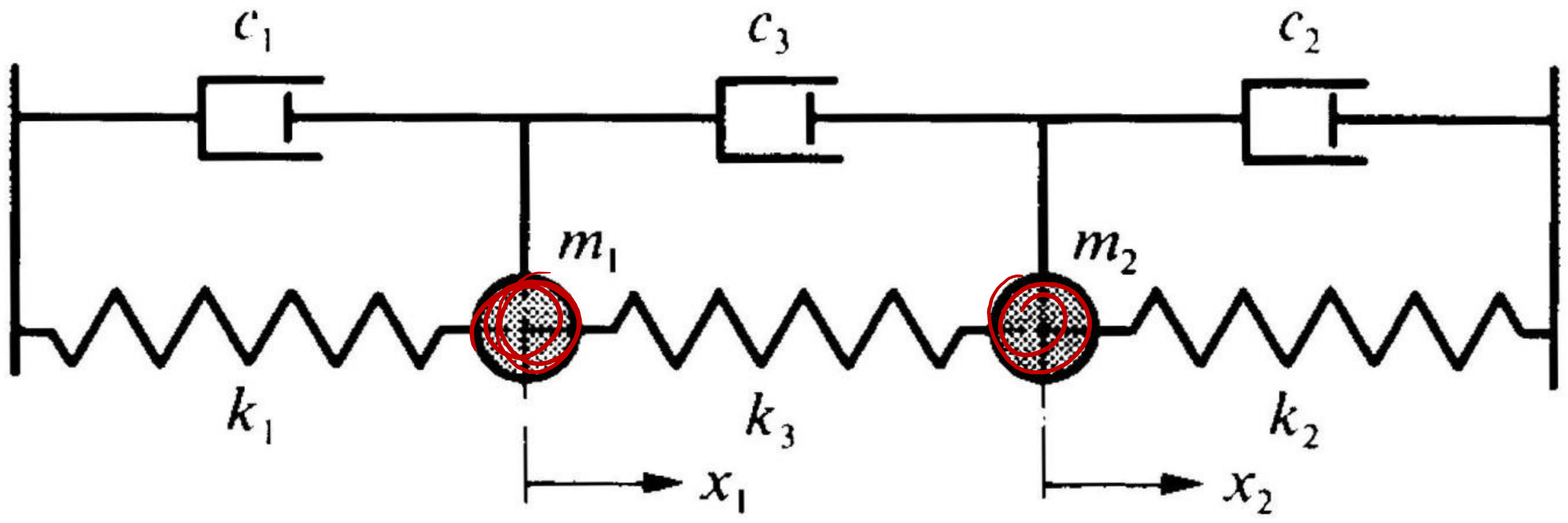
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{f}(t) \qquad (10.11)$$

Application des équations de Lagrange à
l'oscillateur généralisé

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M]\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\boldsymbol{x} + [C]\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t)$$

$$\boxed{[M]\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t)}$$

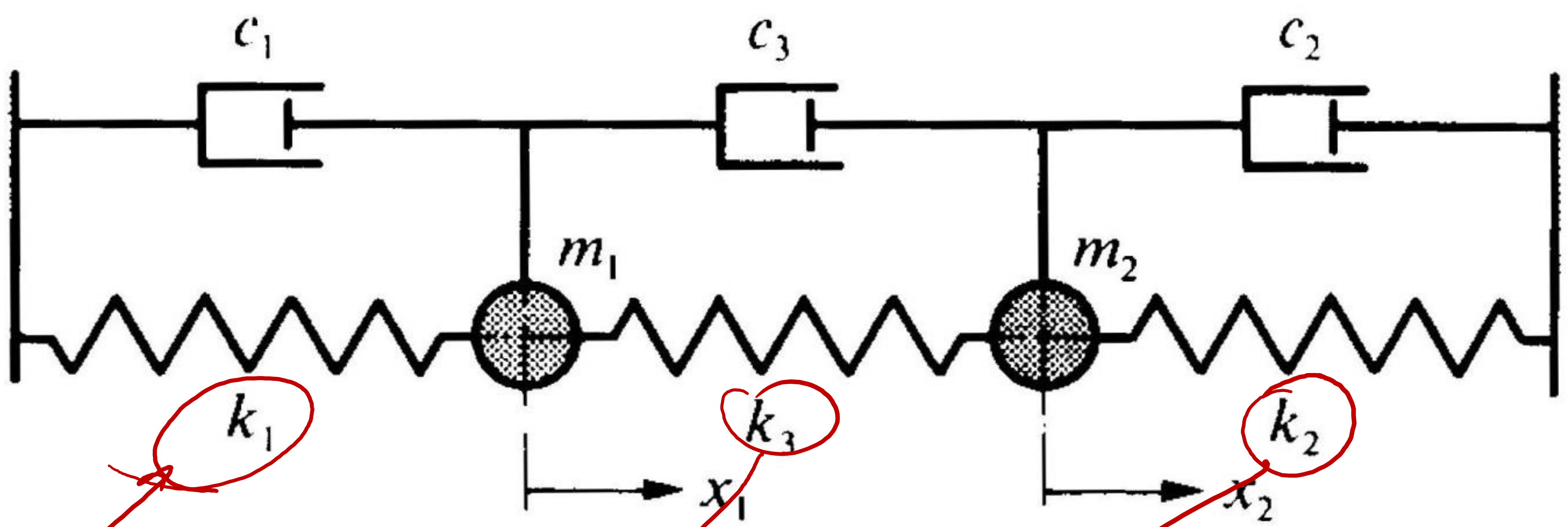
Oscillateur Généralisé – Application à 2 DdL



Energie cinétique du système à deux degrés de liberté

$$
\begin{aligned}
T &= \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2} \\
&= \frac{1}{2} \{\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{x}}^T [M] \dot{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
$$

Oscillateur Généralisé – Application à 2 DdL



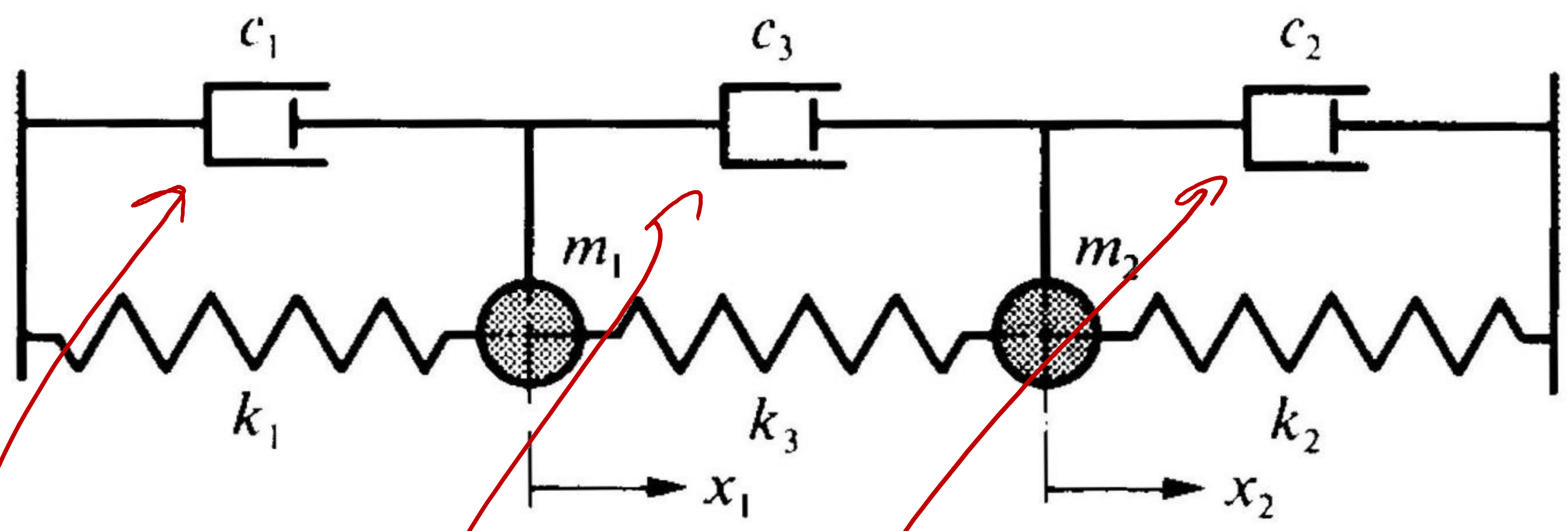
Energie potentielle du système à deux degrés de liberté

$$V = \frac{1}{2}\left(k_1\,x_1^2 + k_3\,(x_1 - x_2)^2 + k_2\,x_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x_1 \quad x_2\right\}\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\,[K]\,\boldsymbol{x}$$

Oscillateur Généralisé – Application à 2 DdL



Fonction de dissipation de Rayleigh du système à deux degrés de liberté

$$W = \frac{1}{2}\left(c_1\,\dot{x}_1^2 + c_3\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2 + c_2\,\dot{x}_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\dot{x}_1 \;{}^{3}\; \dot{x}_2\right\}\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T\,[C]\,\dot{\boldsymbol{x}}$$

Leçon 8.1
Oscillateur Généralisé Conservatif

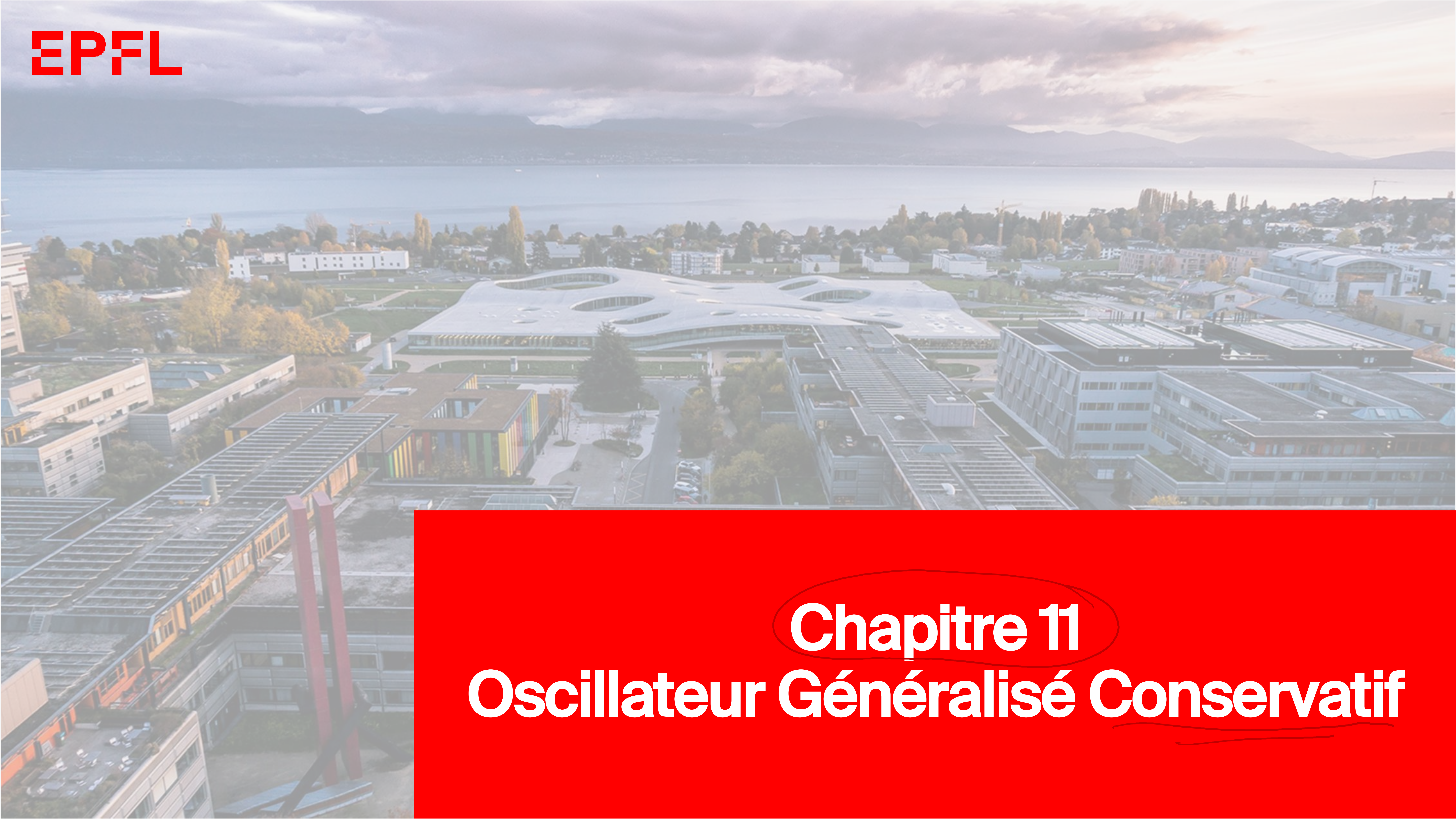
ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

École
polytechnique
fédérale
de Lausanne

Introduction

- Solution par solutions particulières
- Solution en la Base Modale
- Orthogonalité des vecteurs propres
- Cas libre (réponse aux C.I.)
- Quotient de Rayleigh



Chapitre 11
Oscillateur Généralisé Conservatif

EPFL Equations Généralisées Conservatives

Equation différentielle de l'*oscillateur généralisé* à n degrés de liberté en régime libre conservatif

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}} + [K]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (11.1)$$

Reformulation du régime libre de l'oscillateur généralisé conservatif

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + [M]^{-1}[K]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (11.2)$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + [A]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (11.4)$$

Définition du *noyau* du système

$$[A] = [M]^{-1}[K] \qquad (11.3)$$

Méthodes de résolution du régime libre de l'oscillateur généralisé

- Combinaison linéaire de solutions particulières
- Changement de base par recours aux coordonnées normales (ou découplées)

Résolution par solutions particulières

Résolution du régime libre conservatif par recherche de solutions particulières de la forme

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\cos(\omega t - \varphi) \qquad (11.5)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \vec{X} \cos(\omega t - \varphi)$$

Intégration de la solution dans l'expression du régime libre conservatif

$$\boxed{\left[-\omega^2[I] + [A]\right]\boldsymbol{X}\cos(\omega t - \varphi) = \boldsymbol{0}} \quad \forall t$$

ou

$$\boxed{\left[[A] - \delta[I]\right]\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}} \quad (\delta = \omega^2) \qquad (11.7) \quad \forall X \Rightarrow \det([A] - \delta \cdot I) = 0$$

$\hookrightarrow \omega_I, \omega_{II}, \omega_{III} \ldots \omega_n \rightarrow$ pulsations propres

Résolution par solutions particulières

Condition pour une solution non triviale

$$\left| [A] - \delta [I] \right| = 0 \qquad (11.8)$$

ou, par développement,

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \delta) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \delta) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \delta) \end{vmatrix} = 0 \qquad (11.9)$$

Equation caractéristique du système oscillant ou *équation aux pulsations propres*

$$\delta^n + \alpha_1 \delta^{n-1} + \alpha_2 \delta^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} \delta + \alpha_n = 0 \qquad (11.10)$$

Ordonnancement des solutions (toutes positives) de l'équation caractéristique et des pulsations propres

$$\delta_I < \delta_{II} < \cdots < \delta_p < \cdots < \delta_N \qquad (11.11)$$

$$\omega_I < \omega_{II} < \cdots < \omega_p < \cdots < \omega_N \qquad (11.12)$$

$$\left\{ \vec{\beta}_I, \vec{\beta}_{II}, \ldots, \vec{\beta}_p, \ldots \vec{\beta}_n \right\} \rightarrow \text{Base}$$

Résolution par solutions particulières

Solution particulière du système différentiel relative à la pulsation propre de rang p

$$\overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{X_p} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \qquad (11.13)$$

Ecriture en *notations indicielles* du mode propre de rang p

$$\begin{cases} x_{1p} = X_{1p} \cos(\omega_p t - \varphi_p) = \beta_{1p} \cdot X_p \cdot \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ \vdots \\ x_{ip} = X_{ip} \cos(\omega_p t - \varphi_p) = \beta_{ip} \cdot X_p \cdot \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ \vdots \\ x_{np} = X_{np} \cos(\omega_p t - \varphi_p) = \beta_{np} \cdot X_p \cdot \cos(\omega_p t - \varphi_p) \end{cases} \qquad (11.14)$$

Cond. initiales

$$\boxed{\overrightarrow{\beta_p} = \begin{pmatrix} \beta_{1p} \\ \vdots \\ \beta_{ip} \\ \vdots \\ \beta_{np} \end{pmatrix}}$$

Résolution par solutions particulières

Calcul des *composantes* de la forme propre de rang p

$$\left[[A] - \delta_p [I]\right] \boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{0}$$

Composantes des formes propres définies à un facteur près – *Normalisation* des amplitudes

$$\beta_{ip} = \frac{X_{ip}}{X_p} \Rightarrow \overrightarrow{X_p} = \overrightarrow{\beta_p} X_p \qquad (11.15)$$

X_p amplitude de référence

$\vec{X}(t=0) = \sum_{p=1}^{n} \varphi_p \cdot \vec{\beta_p}$

Solution générale – *Combinaison* linéaire des solutions particulières

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{p=1}^{n} \overline{\beta_p} X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) \qquad (11.16)}$$

Résolution par solutions particulières

$$\vec{x}(t) = \sum_{p=I}^{n} \overrightarrow{\beta_p} X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p)$$

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{\beta_I} X_I \cos(\omega_I t - \varphi_I) + \cdots + \overrightarrow{\beta_p} X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) + \cdots + \overrightarrow{\beta_n} X_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1I} \\ \vdots \\ \beta_{iI} \\ \vdots \\ \beta_{nI} \end{pmatrix} X_I \cos(\omega_I t - \varphi_I)}_{\text{Mode } I} + \cdots + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1p} \\ \vdots \\ \beta_{ip} \\ \vdots \\ \beta_{np} \end{pmatrix} X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p)}_{\text{Mode } p} + \cdots + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{in} \\ \vdots \\ \beta_{nn} \end{pmatrix} X_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)}_{\text{Mode } n} \quad (11.17)$$

Résolution dans la base modale

$\hat{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \vec{\beta_I}$ // $\hat{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \vec{\beta_{II}}$

Résolution du régime libre conservatif par *changement de base* – Matrice de changement de base

$$\vec{x} = [B]\vec{q} \qquad (11.31)$$

q_p *coordonnées normales* ou *modales* de rang p ($p = 1, 2, \ldots, n$)

$[B]$ *matrice de changement de base*

$$[B] = \left(\overrightarrow{\beta_I} \quad \ldots \quad \overrightarrow{\beta_p} \quad \ldots \quad \overrightarrow{\beta_n}\right) = \begin{pmatrix} \beta_{1I} & \ldots & \beta_{1p} & \ldots & \beta_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \beta_{iI} & \ldots & \beta_{ip} & \ldots & \beta_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \beta_{nI} & \ldots & \beta_{np} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

Lien entre les accélérations du système et les accélérations modales ou normales

$$\ddot{\vec{x}} = [B]\ddot{\vec{q}} \qquad (11.32)$$

$[M] \cdot \ddot{\vec{x}} + [K] \cdot \vec{x} = 0$

Reformulation du régime libre conservatif par le changement de base

$$\boxed{[M][B]\ddot{\vec{q}} + [K][B]\vec{q} = 0} \qquad (11.33)$$

Résolution dans la base modale

$$[M][B]\ddot{\vec{q}} + [K][B]\vec{q} = 0 \qquad (11.33)$$

Prémultiplication de l'expression du régime libre par la matrice $[B]^T$

$$[B]^T[M][B]\ddot{\vec{q}} + [B]^T[K][B]\vec{q} = 0 \qquad (11.34)$$

Conditions pour un *découplage* des n équations du régime libre conservatif

$$\begin{cases} [M^o] = [B]^T[M][B] \\ [K^o] = [B]^T[K][B] \end{cases} \qquad (11.35)$$

$[M^o]^T = [M^o]$

avec $[M^o]$ et $[K^o]$ diagonales

Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice $[B]$ diagonalisant simultanément $[M]$ et $[K]$

$[M]$ et $[K]$ symétriques

$[M]$ et/ou $[K]$ définie(s) strictement positive(s)

Résolution dans la base modale

$$[B]^T[M][B]\ddot{\vec{q}} + [B]^T[K][B]\vec{q} = 0 \qquad (11.34)$$

$$\begin{cases} [M^o] = [B]^T[M][B] \\ [K^o] = [B]^T[K][B] \end{cases} \qquad (11.35)$$

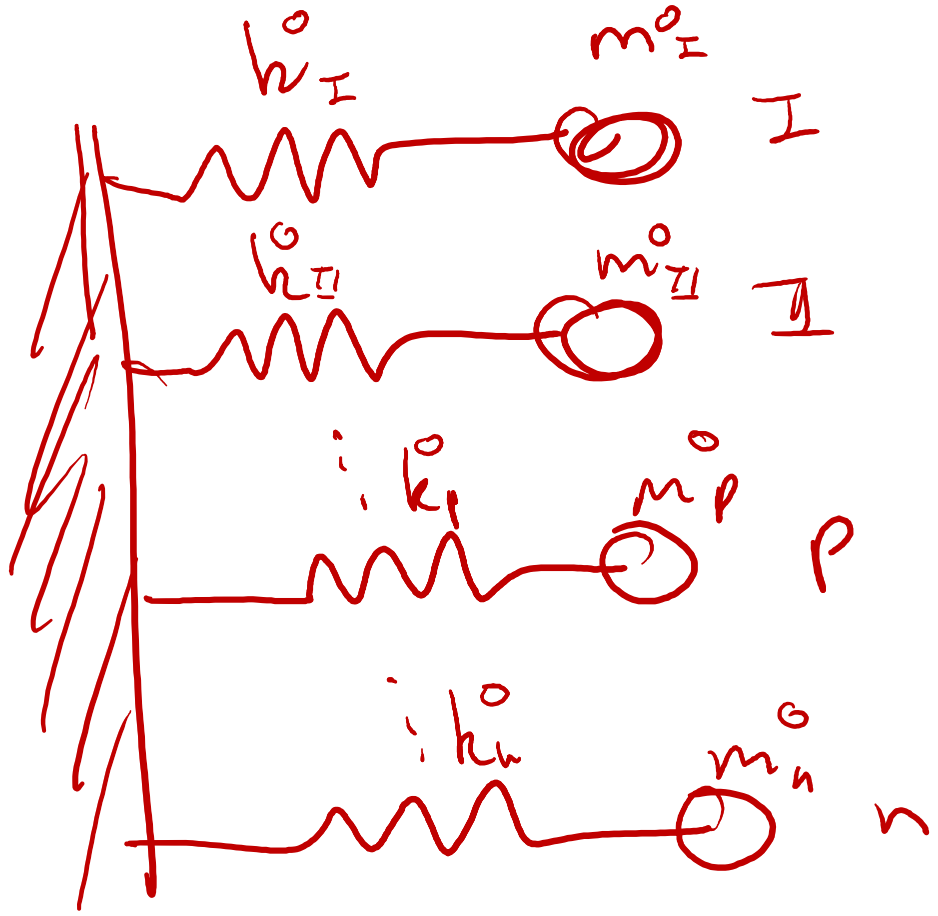
$$\begin{pmatrix} m^o_I & & & & 0 \\ & m^o_{II} & & & \\ & & \ddots \; m^o_p & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & m^o_n \end{pmatrix}$$

Découplage des n équations du régime libre conservatif

$$m^o_I \, \ddot{q}_I + k^o_I \cdot q_I = 0$$

$$m_p^o \ddot{q}_p + k_p^0 q_p = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n) \qquad (11.28)$$

$$\ddot{q}_p + \delta_p q_p = 0, \quad (p = 1, 2, \ldots, n) \qquad (11.29)$$



avec

$$\omega_p^2 = \delta_p = \frac{k_p^o}{m_p^o} \qquad (11.30)$$

Résolution dans la base modale

$$[B]^{-1}[M]^{-1}[B]^{T^{-1}}\,[B]^T[M][B]\ddot{\vec{q}} + [B]^T[K][B]\vec{q} = 0 \qquad (11.34)$$

Expression matricielle du régime libre

$$[B]^{-1}[B]=\left(\vec{\beta}_I\ \vec{\beta}_{II}\ \cdots\ \vec{\beta}_p\ \cdots\ \vec{\beta}_n\right)$$

$$\ddot{\vec{q}} + \boxed{[B]^{-1}[M]^{-1}[K][B]}\vec{q} = 0 \qquad (11.36)$$

$$\ddot{\vec{q}} + [\Delta]\vec{q} = 0$$

$$\boxed{[\Delta] = [B]^{-1}\cdot[A]\cdot[B]}$$

avec

$$[\Delta] = \begin{pmatrix} \delta_I^0 & & & & 0 \\ & \delta_{II}^0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \delta_p^0 & \\ 0 & & & & \delta_n^0 \end{pmatrix}$$

$$[\Delta] = \operatorname{diag}(\delta_p;\ p = 1, 2,\ \ldots, n)$$

$$= [B]^{-1}[M]^{-1}[K][B] \qquad (11.37)$$

$$= [B]^{-1}[A][B] \qquad (11.38)$$

$[\Delta]$ matrice des valeurs propres de $[A]$
$[B]$ matrice des vecteurs propres de $[A]$

EPFL

Résolution dans la base modale

Régime libre découplé en n équations

$$[M^o]\ddot{\vec{q}} + [K^o]\vec{q} = 0 \qquad (11.43)$$

$$\ddot{\vec{q}} + [M^o]^{-1}[K^o]\vec{q} = 0 \qquad (11.44)$$

Forme finale du régime libre par *découplage* en n équations différentielles du second ordre

$$\ddot{\vec{q}} + [\Delta]\vec{q} = 0 \qquad (11.46)$$

avec

$$[\Delta] = [M^o]^{-1}[K^o] \qquad (11.45)$$

Résolution dans la base modale

$\ddot{q}_p + \omega_p^2 \cdot q_p = 0$

Intégration des équations différentielles découplées

$$q_p = Q_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) \qquad p = 1, 2, \ldots, n \qquad (11.53)$$

Forme générale de la *solution* du régime libre découplé

$$\vec{x}(t) = [B]\vec{q} = \sum_{p=1}^{n} \overrightarrow{\beta_p} \cdot q_p(t) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \overrightarrow{\beta_p} \cdot Q_p \cos(\omega_p t - \varphi_p)$$

Energie dans la base/forme modale

Energie cinétique du système exprimée dans la *base modale*

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T[M]\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T[B]^T[M][B]\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T[M^o]\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_p^n m_p^o \dot{q}_p^2 \end{aligned} \qquad (11.48)$$

Energie potentielle du système exprimée dans la *base modale*

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T[K]\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T[B]^T[K][B]\boldsymbol{q} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T[K^o]\boldsymbol{q} \\ &= \frac{1}{2}\sum_p^n k_p^o q_p^2 \end{aligned} \qquad (11.47)$$

Fréquences propres

Positivité des valeurs propres (carrés des pulsations propres) du système

$$m_p^o > 0 \quad [M^o] \text{ définie strictement positive}$$

$$k_p^o \geq 0 \quad [K^o] \text{ définie positive non strictement}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta_p = \omega_p^2 = \frac{k_p^o}{m_p^o} \geq 0} \qquad (11.49\text{-}52)$$

Ordonnancement des solutions (toutes positives) de l'équation caractéristique et des pulsations propres

$$\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_p < \ldots < \delta_n \qquad (11.11)$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_p < \ldots < \omega_n \qquad (11.12)$$

Orthogonalité des vecteurs modaux

$\boxed{m^o_I = \vec{\beta}_I^T \cdot [M] \cdot \vec{\beta}_I}$

Indépendance linéaire des *vecteurs modaux*

$$\sum_{p}^{n} \gamma_p \boldsymbol{\beta}_p \neq \boldsymbol{0} \qquad (11.56)$$

Développement de la *projection* de la matrice de masse $[M]$ dans la *base modale* (base des vecteurs modaux)

$$\boxed{[B]^T [M] [B] = [M^o]} \qquad (11.57)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n^T \end{bmatrix} [M] [\boldsymbol{\beta}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_n] = \begin{bmatrix} m_1^o & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n^o \end{bmatrix}$$

$m^o_{rs} = \vec{\beta}_r^T \cdot [M] \cdot \vec{\beta}_s$

Identification terme à terme des *masses modales*

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{\beta}_r = m_r^o} \qquad (11.58)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{\beta}_s = 0 \qquad r \neq s} \qquad (11.59)$$

Orthogonalité des vecteurs modaux

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{\beta}_s = \delta_{rs}\, m_r^o} \qquad (11.60)$$

Si: $[M] = m\mathbb{I} \Rightarrow m \boxed{\vec{\beta}_r^T \cdot \vec{\beta}_s = \delta_{rs}} \cdot m_r^o \Rightarrow \vec{\beta}_r^T \vec{\beta}_s = 0$ $r \neq s$

Orthogonalité des vecteurs modaux

Développement de la *projection* de la matrice de rigidité $[M]$ dans la *base modale* (base des vecteurs modaux)

$$[B]^T[K][B] = [K^o]$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n^T \end{bmatrix} [K][\boldsymbol{\beta}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_n] = \begin{bmatrix} k_1^o & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n^o \end{bmatrix}$$

Identification terme à terme des *rigidités modales*

$$\boldsymbol{\beta}_r^T[K]\boldsymbol{\beta}_r = k_r^o$$

$$\boldsymbol{\beta}_r^T[K]\boldsymbol{\beta}_s = 0 \qquad r \neq s$$

Orthogonalité des vecteurs modaux

Deuxième forme de l'*orthogonalité* des vecteurs modaux

$$\boldsymbol{\beta}_r^T \, [K] \, \boldsymbol{\beta}_s = \delta_{rs} \, k_r^o \qquad (11.61)$$

Orthogonalité des vecteurs modaux et des modes propres

Le produit scalaire, pondéré par la matrice des masses ou la matrice de rigidité, de deux formes propres ou modes propres de rang différent est nul.

Orthogonalité directe lorsque la matrice des masses est diagonale à termes tous égaux, $[M] = m_0 \, [I]$

$$\boldsymbol{\beta}_r^T \, \boldsymbol{\beta}_s = 0 \qquad r \neq s \qquad (11.62)$$

Normalisation des vecteurs modaux

Procédures de *normalisation* du vecteur modal de rang p ($p = 1, 2, \ldots n$)

- Valeur unitaire attribuée à l'amplitude d'une variable déterminée i du vecteur de rang p

$$\boxed{X_{ip} = 1}$$

- Valeur unitaire attribuée à la plus grande des amplitudes du vecteur de rang p

$$\boxed{\left(X_{ip}\right)_{max} = 1}$$

- Masse modale de rang p rendue unitaire

$$\boldsymbol{\beta}_p^T [M] \boldsymbol{\beta}_p = 1 \quad (11.63)$$

- Norme unitaire du vecteur de rang p

$$\boxed{\left\| \boldsymbol{\beta}_p \right\| = \sum_i^n \beta_{ip}^2 = 1} \quad (11.64)$$

$$\vec{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta}_I = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$[M^\circ], [K^\circ]$

$$\Uparrow$$

$$\beta = \left(\vec{\beta}_I, \vec{\beta}_{II}, \ldots \vec{\beta}_n\right)$$

$$\Downarrow$$

$$q$$

$$\vec{\beta}_I = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\vec{\beta}_I\| = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1+9+25+1} = \frac{\sqrt{36}}{6} = 1$$

Réponse à des conditions initiales

Conditions d'un *lâcher initial*

$$x(0) = X_0 = \sum_p^n \beta_p X_p \cos \varphi_p \qquad (11.65\text{-}67)$$

$$\dot{x}(0) = V_0 = \sum_p^n \beta_p \omega_p X_p \sin \varphi_p \qquad (11.66\text{-}68)$$

→ Système eqs. couplées de 2n eqs. & 2n variables

Prémultiplication des conditions initiales par le produit $\beta_r^T [M]$

$$\beta_r^T [M] X_0 = \sum_p^n \underbrace{\beta_r^T [M] \beta_p}_{m_r^\circ \cdot \delta_{rp}} X_p \cos \varphi_p = m_r^\circ \cdot X_r \cdot \cos(\varphi_r)$$

$$\beta_r^T [M] V_0 = \sum_p^n \underbrace{\beta_r^T [M] \beta_p}_{m_r^\circ \cdot \delta_{rp}} \omega_p X_p \sin \varphi_p = m_r^\circ \cdot \omega_r \cdot X_r \cdot \sin(\varphi_r)$$

→ n systèmes de 2 eqs. & 2 var.

Réponse à des conditions initiales

Extraction de l'*amplitude de référence* et de la *phase* du mode de rang r

$$X_r \cos\varphi_r = \frac{1}{m_r^o}\boldsymbol{\beta}_r^T[M]\boldsymbol{X}_0 \qquad (11.69)$$

$$X_r \sin\varphi_r = \frac{1}{m_r^o\,\omega_r}\boldsymbol{\beta}_r^T[M]\boldsymbol{V}_0 \qquad (11.70)$$

Réponse du système aux conditions initiales

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p X_p \cos\left(\omega_p t - \varphi_p\right)$$

$$= \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p X_p \left(\cos\varphi_p \cos\omega_p t + \sin\varphi_p \sin\omega_p t\right)$$

$$= \sum_p^n \frac{1}{m_p^o}\boldsymbol{\beta}_p\left(\boldsymbol{\beta}_p^T[M]\boldsymbol{X}_0 \cos\omega_p t + \frac{1}{\omega_p}\boldsymbol{\beta}_p^T[M]\boldsymbol{V}_0 \sin\omega_p t\right)$$

Réponse à des conditions initiales

mode 1
mode 2
mode p
mode n

Réponse du système aux conditions initiales

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \sum_{p}^{n} \boldsymbol{\beta}_p X_p \cos\left(\omega_p t - \varphi_p\right) = \sum_{p}^{n} \frac{1}{m_p^o} \boldsymbol{\beta}_p \left(\boldsymbol{\beta}_p^T [M] \boldsymbol{X}_0 \cos \omega_p t + \frac{1}{\omega_p} \boldsymbol{\beta}_p^T [M] \boldsymbol{V}_0 \sin \omega_p t \right)}$$

Cas particulier d'un *déplacement initial* proportionnel à un vecteur modal ($\boldsymbol{X}_0 = X_0 \boldsymbol{\beta}_r$) et d'une *vitesse initiale* nulle ($\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{0}$)

$$\boldsymbol{x} = X_0 \sum_{p}^{n} \frac{1}{m_p^o} \boldsymbol{\beta}_p \left(\boldsymbol{\beta}_p^T [M] \boldsymbol{\beta}_r \right) \cos \omega_p t$$

$$= X_0 \boldsymbol{\beta}_r \cos \omega_r t \qquad (11.74)$$

Cas particulier d'un *déplacement initial* et d'une *vitesse initiale* proportionnels à un vecteur modal ($\boldsymbol{X}_0 = X_0 \boldsymbol{\beta}_r$, $\boldsymbol{V}_0 = V_0 \boldsymbol{\beta}_r$)

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_r}\right)^2} \boldsymbol{\beta}_r \cos\left(\omega_r t - \varphi_r\right)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{V_0}{X_0 \omega_r} \qquad (11.76)$$

Réponse à des conditions initiales

Cas particulier d'un *déplacement initial* proportionnel à un vecteur modal ($\boldsymbol{X}_0 = X_0\, \boldsymbol{\beta}_r$) et d'une *vitesse initiale* nulle ($\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{0}$)

$$\boldsymbol{x} = X_0 \sum_p^n \frac{1}{m_p^o} \boldsymbol{\beta}_p \left(\boldsymbol{\beta}_p^T [M] \boldsymbol{\beta}_r \right) \cos \omega_p t = X_0\, \boldsymbol{\beta}_r \cos \omega_r t \qquad (11.74)$$

Cas particulier d'un *déplacement initial* et d'une *vitesse initiale* proportionnels à un vecteur modal ($\boldsymbol{X}_0 = X_0\, \boldsymbol{\beta}_r,\ \boldsymbol{V}_0 = V_0\, \boldsymbol{\beta}_r$)

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_r} \right)^2}\, \boldsymbol{\beta}_r \cos\left(\omega_r t - \varphi_r \right)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{V_0}{X_0\, \omega_r} \qquad (11.76)$$

Quotient de Rayleigh

Définition du *quotient de Rayleigh* ($\boldsymbol{u}$ vecteur quelconque)

$$\boxed{R(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^T[K]\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^T[M]\boldsymbol{u}}} \qquad (11.79)$$

Valeur du quotient de Rayleigh pour un *vecteur modal*

$$R(\boldsymbol{\beta}_p) = \frac{\boldsymbol{\beta}_p^T[K]\boldsymbol{\beta}_p}{\boldsymbol{\beta}_p^T[M]\boldsymbol{\beta}_p} = \frac{k_p^o}{m_p^o} = \delta_p = \omega_p^2$$

$$p = 1, 2, \dots, n \qquad (11.78)$$

Quotient de Rayleigh

Valeur du quotient de Rayleigh pour un vecteur quelconque $\boldsymbol{u}$ écrit comme combinaison linéaire des vecteurs modaux $\boldsymbol{\beta}_p$ $(p = 1, 2, \ldots n)$

$$R(\boldsymbol{u}) = R\left(\sum_p^n \gamma_p \boldsymbol{\beta}_p\right)$$

$$= R([B]\gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma = \left\{\gamma_1, \ldots \gamma_p, \ldots \gamma_n\right\}^T$$

$$= \frac{\gamma^T [B]^T [K][B]\gamma}{\gamma^T [B]^T [M][B]\gamma} = \frac{\gamma^T [\Delta]\gamma}{\gamma^T \gamma} = \boxed{\frac{\sum\limits_p^n \delta_p \gamma_p^2}{\sum\limits_p^n \gamma_p^2}} \qquad (11.83)$$

sous la condition de normalisation

$$[B]^T [M][B] = [I]$$

$$[B]^T [K][B] = [\Delta]$$

$\vec{u} = \sum \gamma_p \cdot \vec{\beta}_p = [B] \cdot \vec{\gamma}$

$\vec{u}$ très proche de $\vec{\beta}_p$

$\Rightarrow \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} - r$

$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} - r$

EPFL Quotient de Rayleigh

Valeur du quotient de Rayleigh au *voisinage d'un vecteur modal*

$$R(\boldsymbol{u}) = \frac{\delta_r + \sum_{p \neq r}^{n} \delta_p \, \varepsilon_p^2}{1 + \sum_{p \neq r}^{n} \varepsilon_p^2} \tag{11.85}$$

avec

$$\gamma_p = \varepsilon_p \, \gamma_r \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\varepsilon_p << 1 \quad \forall p \neq r \tag{11.84}$$

Stationnarité du quotient de Rayleigh au voisinage du vecteur modal considéré

$$R(\boldsymbol{u}) \approx \left(\delta_r + \sum_{p \neq r}^{n} \delta_p \, \varepsilon_p^2 \right) \left(1 - \sum_{p \neq r}^{n} \varepsilon_p^2 \right) \tag{11.85}$$

$$\approx \boxed{\delta_r + \sum_{p \neq r}^{n} \left(\delta_p - \delta_r \right) \varepsilon_p^2} \tag{11.86}$$

Quotient de Rayleigh

Valeur du quotient de Rayleigh au voisinage du vecteur modal *fondamental*

$$R(\boldsymbol{u}) \approx \delta_1 + \sum_{p \neq r}^{n} \left(\delta_p - \delta_1\right) \varepsilon_p^2 \qquad (11.87)$$

$$\geq \delta_1 \qquad (11.88)$$

Valeur du quotient de Rayleigh au voisinage du vecteur modal de rang *n*

$$R(\boldsymbol{u}) \approx \delta_n + \sum_{p \neq r}^{n} \left(\delta_p - \delta_n\right) \varepsilon_p^2$$

$$\leq \delta_n$$

Théorème d'encadrement du quotient de Rayleigh

$$\boxed{\delta_1} \leq \underline{R(\boldsymbol{u})} \leq \boxed{\delta_n}$$

Principe de Rayleigh

$$\omega_1^2 = \delta_1 = \min_{\boldsymbol{u}} R(\boldsymbol{u})$$

$$\omega_n^2 = \delta_n = \max_{\boldsymbol{u}} R(\boldsymbol{u})$$

$$\boxed{\omega_1^2 \leq R(\hat{u}) \leq \omega_n^2}$$